EPREUVE DE MATHEMATIQUES CII

Durée : 4 heures

Notations :

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ (resp. C) le corps des réels (resp. des complexes). On désigne par K l'un ou l'autre de ces deux corps, par n un élément de $\mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}$ privé de 0), par U_2 l'ensemble {-1, +1}, par [n] l'ensemble {1,2,...,n}, par $M_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K.

Si $A \in M_n(K)$, on note $a_{j,k}$ l'élément de la j-ième ligne et la k-ième colonne de A pour tout $(j,k) \in [n] \times [n]$; on écrit alors $A = (a_{j,k})$; on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et T(A) la trace de A, c'est-à-dire la somme $\sum_{j=1}^{n} a_{j,j}$. On note I_n la matrice unité d'ordre n.

Si $A \in M_n(K)$, on note $f_{A,K}$ l'endomorphisme du K-espace vectoriel K^n dont la matrice dans la base canonique de K^n est A.

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, rapporté à sa base canonique $\{ e_i, i \in [n] \}$, que l'on note simplement (e) ; $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique : Si $V = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ et $W = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in \mathbb{R}^n$ on note $\langle V,W \rangle$ le produit scalaire $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ de V et W, $\| V \| = \sqrt{\langle V,V \rangle}$ la norme de V. Enfin si $x \in \mathbb{R}$ on note |x| la valeur absolue de x.

Ensembles $\mathcal{H}_n$:

On appelle matrice de Hadamard d'ordre n toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans l'ensemble U_2 et telle que ${}^tA.A = n I_n$; une telle matrice sera désignée par le terme de H-matrice d'ordre n.

Une H-matrice est dite normalisée si tous les termes de sa première ligne et de sa première colonne sont égaux à +1.

L'ensemble des H-matrices (resp. des H-matrices symétriques) d'ordre n est noté $\mathcal{H}_n$ (resp. $S\mathcal{H}_n$).
L'objet de ce problème est l'étude de l'ensemble $\mathcal{H}_n$.

PARTIE I PROPRIETES ELEMENTAIRES DE $\mathcal{H}_n$

I.1 - On considère la H-matrice normalisée d'ordre 2 : $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Préciser les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de $f_{N_2,\mathbb{R}}$.

I.2 - Expliciter les matrices appartenant à l'ensemble $\mathcal{H}_2$(resp. $S\mathcal{H}_2$).

I.3a - Quelles sont les valeurs propres de $f_{A,\mathbb{R}}$ si $A \in S\mathcal{H}_2$?

I.3b - Quelles sont pour chaque matrice A non symétrique de l'ensemble $\mathcal{H}_2$, les valeurs propres de $f_{A,C}$?

I.4 - On suppose que l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^n$ est rapporté au repère orthonormé $(O, e_1, e_2, ..., e_n)$. Pour chaque matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{H}_2$, on désigne par $\mathcal{C}_A$ l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$ax^2 + (b+c)xy + cy^2 = 1$ et par $\mathcal{S}_A$ l'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $ax^2 + (b+c)xy + cy^2 = z^2$.

I.4a - Quelle est la nature de $\mathcal{C}_A$ (resp. de $\mathcal{S}_A$) si $A \in S\mathcal{H}_2$?

I.4b - Quelle est pour chaque matrice non symétrique de l'ensemble $\mathcal{H}_2$ la nature de $\mathcal{C}_A$ (resp. de $\mathcal{S}_A$) ?

A SUIVRE

I.5 - On suppose que l'ensemble $\mathcal{H}_n$ est non vide ; soit $A \in \mathcal{H}_n$.

I.5a - Montrer que A est inversible ; préciser A^{-1} et $|\det A|$.

I.5b - La matrice A^{-1} appartient-elle à $\mathcal{H}_n$?

I.5c - La matrice ${}^tA$ appartient-elle à $\mathcal{H}_n$?

PARTIE II

Dans cette partie, on suppose que l'entier n est au moins égal à deux, que l'ensemble $\mathcal{H}_n$ n'est pas vide et on désigne par $A = (a_{j,k})$ une matrice appartenant à $\mathcal{H}_n$.

Pour tout $k \in [n]$ on note V_k le "k-ième vecteur colonne" $\sum_{j=1}^{n} a_{j,k}\, e_j$; on note $\varphi(A)$ la somme $\sum_{(j,k)\ \in [n]\times[n]} a_{j,k}$ (c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\right)$) et l'on pose $\tilde{V} = \sum_{k=1}^{n} V_k$ et $\tilde{U} = \sum_{j=1}^{n} e_j$

II.1 - Expliciter les produits scalaires $\langle V_{k_1}, V_{k_2}\rangle$ pour $(k_1, k_2) \in [n] \times [n]$.

II.2 - Une majoration de $|\varphi(A)|$.

II.2a - Calculer $\|\tilde{V}\|^2$ et $\|\tilde{U}\|^2$ en fonction de n. En déduire qu'il existe une constante ξ (indépendante de n et de A) que l'on explicitera telle que $\|\tilde{U}\|\,\|\tilde{V}\| = n^{\xi}$.

II.2b - Calculer le produit scalaire $\langle \tilde{U}, \tilde{V}\rangle$ et montrer que $|\varphi(A)| \leq n^{\xi}$.

II.2c - Montrer que si n n'est pas le carré d'un entier il n'existe pas de matrice A dans $\mathcal{H}_n$ telle que $|\varphi(A)| = n^{\xi}$.

II.2d - Expliciter une matrice A appartenant à $\mathcal{H}_4$ telle que $T(A) = -4$ et $\varphi(A) = 4^{\xi}$.

II.3 - Conditions nécessaires pour que l'ensemble $\mathcal{H}_n$ soit non vide.

II.3a - Soit D_n l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux appartiennent à $U_2 = \{-1, +1\}$.

La matrice A étant donnée, toujours dans $\mathcal{H}_n$, montrer qu'il existe un couple $(\Delta_1, \Delta_2) \in (D_n)^2$ tel que la matrice $B = \Delta_1 A \Delta_2$ soit une H-matrice normalisée d'ordre n ; le couple (Δ_1, Δ_2) est-il unique ?

II.3b - On suppose, dans cette question, que la matrice A est normalisée.

II.3bI - Montrer que l'entier n est pair (on pourra par exemple considérer le produit scalaire $\langle V_1, V_2\rangle$).

Quelle est la valeur de $\varphi(A)$?

II.3bII - On suppose que $n > 2$ et on désigne par :

x	le cardinal de l'ensemble des entiers j appartenant à [n] tels que	$a_{j,2} > 0$ et $a_{j,3} > 0$
y	" " " " " " "	$a_{j,2} > 0$ et $a_{j,3} < 0$
z	" " " " " " "	$a_{j,2} < 0$ et $a_{j,3} > 0$
t	" " " " " " "	$a_{j,2} < 0$ et $a_{j,3} < 0$

Montrer que (x,y,z,t) est la solution d'un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues que l'on écrira. En déduire que n est un multiple de 4.

Tournez la page S.V.P.

II.4 - Valeurs propres d'une H-matrice symétrique.

On suppose que l'ensemble $S\mathcal{H}_n$ est non vide ; soit $A \in S\mathcal{H}_n$.

II.4a - Rappeler pourquoi la matrice A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

Préciser l'endomorphisme composé $f_{A,\mathbb{R}} \circ f_{A,\mathbb{R}}$.

II.4b - En déduire que $f_{A,\mathbb{R}}$ possède deux valeurs propres distinctes, que l'on précisera.

II.4c - On désigne par μ_1 et μ_2 les ordres de multiplicité des valeurs propres de $f_{A,\mathbb{R}}$.

Montrer que $|\mu_1 - \mu_2| \leq \sqrt{n}$.

PARTIE III

Dans cette partie on étudie un procédé de fabrication de H-matrices.

On désigne par A,B,C,D, quatre matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$; on suppose que ces matrices commutent entre elles et on considère la matrice :

$$\Psi = \begin{bmatrix} A & -B & -C & -D \\ B & A & D & -C \\ C & -D & A & B \\ D & C & -B & A \end{bmatrix} \in M_{4n}(\mathbb{R})$$

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par : $p(e_1) = e_n$ et pour tout j, $2 \leq j \leq n$, $p(e_j) = e_{j-1}$.

On désigne par P la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et par $\mathcal{A}(P)$ le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ engendré par les puissances de P (P^k pour k parcourant $\mathbb{N}$, avec $P^0 = I_n$).

III.1 - Montrer que $\mathcal{A}(P)$ admet pour base la famille $\{P^k, 0 \leq k \leq n-1\}$

III.2 - A quelles conditions portant sur les nombres réels λ_k la matrice $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P^k$ est-elle symétrique ?

III.3 - On suppose que les matrices A,B,C,D appartiennent à $\mathcal{A}(P)$, qu'elles sont à coefficients dans $U_2 = \{-1, +1\}$ et qu'elles vérifient la condition :

$(\mathcal{F})$ $\quad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4n\, I_n$.

III.3 a - Calculer le produit ${}^t\Psi . \Psi$ (on utilisera le produit par blocs des deux matrices). A quel ensemble la matrice Ψ appartient-elle ?

III.3b - Dans le cas n = 3, expliciter les matrices A,B,C,D qui satisfont en outre à B = C = D et T(A) = T(B) > 0.

Calculer $T(\Psi)$.

PARTIE IV

Dans cette partie on étudie un deuxième procédé de fabrication de H-matrices.

Définition de $A \otimes B$:

Soient $A = (a_{h,j}) \in M_n(K)$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(K)$;

A SUIVRE

On définit une matrice $A \otimes B \in M_{2n}(K)$ par :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & .... & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & .... & a_{2,n}B \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n,1}B & .... & .... & a_{n,n}B \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}\alpha & a_{1,1}\beta & a_{1,2}\alpha & a_{1,2}\beta & .... & a_{1,n}\alpha & a_{1,n}\beta \\ a_{1,1}\gamma & a_{1,1}\delta & a_{1,2}\gamma & a_{1,2}\delta & .... & a_{1,n}\gamma & a_{1,n}\delta \\ a_{2,1}\alpha & a_{2,1}\beta & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{2,1}\gamma & a_{2,1}\delta & .... & .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n,1}\alpha & a_{n,1}\beta & .... & .... & .... & a_{n,n}\alpha & a_{n,n}\beta \\ a_{n,1}\gamma & a_{n,1}\delta & .... & .... & .... & a_{n,n}\gamma & a_{n,n}\delta \end{bmatrix}$$

IV.1 - Calculer $T(A \otimes B)$ en fonction de $T(A)$ et $T(B)$.

IV.2 - *On suppose que l'ensemble* $\mathcal{H}_n$ *est non vide.*

Montrer que si $A \in \mathcal{H}_n$ et $B \in \mathcal{H}_2$ alors $A \otimes B \in \mathcal{H}_{2n}$.

IV.3 - Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ les ensembles $\mathcal{H}_2^m$, $S\mathcal{H}_2^m$ et $\mathcal{H}_{3.2^{m+2}}$ sont non vides.

IV.4 - L'ensemble $\mathcal{E}_4$ des matrices de la forme $A \otimes B$ avec $A \in \mathcal{H}_2$ et $B \in \mathcal{H}_2$ est-il égal à $\mathcal{H}_4$?

PARTIE V

On considère une matrice inversible $A = (a_{j,k})$ de $M_n(\mathbb{R})$. Comme dans la partie II, pour tout $k \in [n]$ on note V_k le vecteur $\sum_{j=1}^{n} a_{j,k} e_j$. Soit $(\mathcal{E}) = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, ..., \mathcal{E}_n\}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ déduite de la base $(V) = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Soit B la matrice de passage de la base $(\mathcal{E})$ à la base (V).

V.1 - Montrer que $(\det A)^2 = (\det B)^2$.

V.2 - En remarquant que la matrice B est triangulaire supérieure, montrer que :

$$(\det A)^2 \leq \prod_{k=1}^{n} \|V_k\|^2$$

V.3 - On suppose que la matrice A est à coefficients dans l'ensemble U_2. Montrer que l'inégalité obtenue au V.2 est une égalité si et seulement si A appartient à $\mathcal{H}_n$.

FIN